Pentagrama

Título: Pentagrama. **Target:** Profesores de Matemáticas. **Asignatura:** Matemáticas. **Autor:** Carlos Perelló Amorós, Licenciado en matemáticas, Profesor de Matemáticas en Educación Secundaria.

Las matemáticas tienen que ver mucho con los números, pero también con las formas. Cuando estos dos elementos están implicados, los resultados que surgen pueden ser muy interesantes.

Tal vez la más antigua y más conocida, es la idea del cuadrado mágico:

El cuadrado mágico trata de dibujar una cuadrícula de tres por tres y rellenar los números 1, 2, 3, ..., 9, de manera que los tres números de cada fila, cada columna y cada diagonal suman 15.

¿Por qué la fila (etc.) de totales debe ser 15?

¿Por qué el número del centro debe ser de 5?

¿Por qué no puedes tener el número 1 en una casilla de la esquina?

6	1	8
7	5	3
2	9	4

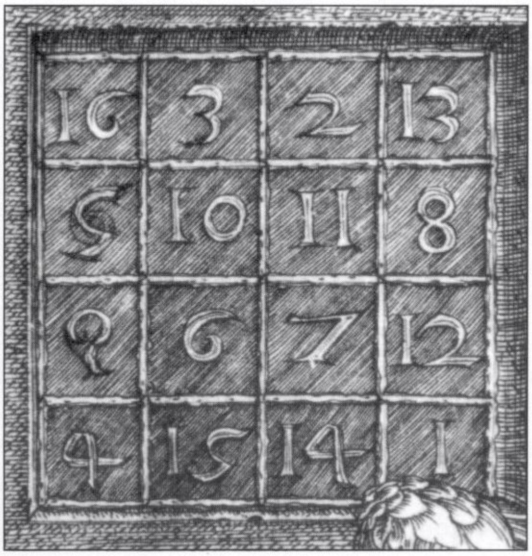
Esta solución no es única. En total, hay ocho soluciones diferentes pero cada una es una pequeña modificación de esta.

Otro ejemplo sería el cuadrado mágico de cuatro por cuatro utilizando los números del 1 al 16; y cada fila, columna o diagonal tiene que tener cuatro números que sumen 34.

Tenemos pues, esta solución:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

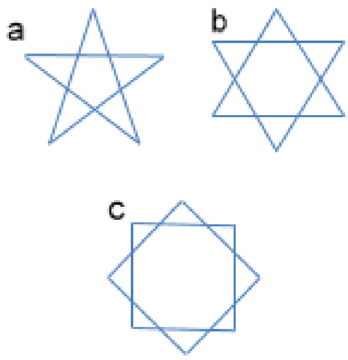
Este ejemplo aparece en el grabado de Albrecht Diirer’s (con fecha 1514), titulada "Melancholia"



Hay 880 tipos distintos de cuadrados mágicos de cuatro por cuatro.

El total se eleva a 7.040 si también incluimos las rotaciones.

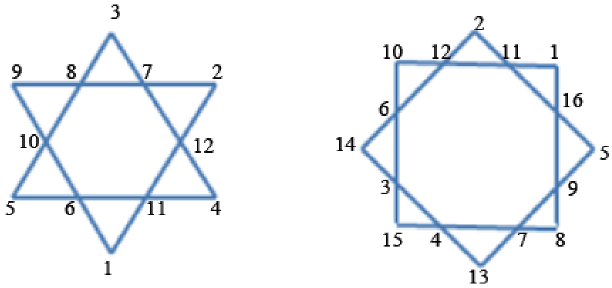
Otras formas o problemas similares se pueden plantear el uso las siguientes figuras:



El problema de estas nuevas figuras consiste, en ver si es posible, colocar los números 1,2,…. En los diagramas a, b y c de manera que la suma de los cuatro números de cada línea sea el mismo.

Figura (A), números del 1 a 10, el total de la línea	22
Figura (B), números del 1 a 12, el total de la línea	26
Figura (C), números del 1 a 16, el total de la línea	34

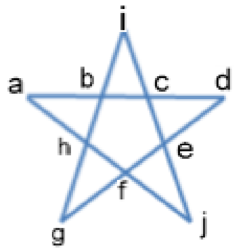
En la investigación se desprende que (B) y (C) son posibles pero no en la figura (A):



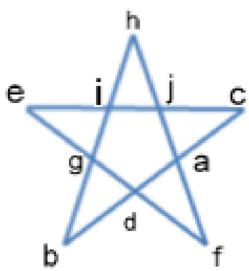
Hay una demostración de porqué los números del 1 al 10 no pueden ser colocados en las intersecciones de la estrella de cinco puntas (Figura A) de tal manera que la suma de los cuatro números en cada línea sea siempre 22.

Veámosla:

En primer lugar, podemos suponer para la demostración, sin pérdida de generalidad, que hay una solución que se puede representar como el siguiente diagrama, con a = 1.



Pero si nos fijamos bien, la figura anterior tiene un doble, en la que el vértice "a" aparece ahora como un vértice interior, y en cada línea siguen apareciendo las mismas letras.



Como hemos supuesto que sí que hay solución, los números (letras) de cada línea deben de sumar 22. Así pues, teniendo en cuenta el primer de los dos pentagramas tenemos:

$a + b + c + d = 22$

$d + e + f + g = 22$

$g + h + b + i = 22$

$i + c + e + j = 22$

$j + f + h + a = 22$

Operando de forma sencilla con la primera y la quinta ecuación tenemos:

$(a + b + c + d) + (j + f + h + a) = 44$

Pero también sabemos que los números que pueden coger las letras van del 1 al 10, por lo tanto si los sumamos todos llegamos a:

$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 55$ (es decir la suma de los 10 primeros números naturales)

Tenemos como conclusión que:

$e + g + i = 55 – (44 – a) = 11 + a$ y como habíamos supuesto que a era igual a 1, entonces:

$e + g + i = 12$

Deduciendo de esta forma llegamos a que la suma de tres números “e, g, i” debe ser 12 por lo que no hay ninguna combinación posible que haga que una de esas tres letras coja el número 10.

Entonces podemos suponer que el valor 10 lo cogerá alguna de las letras que quedan vacantes, veamos cual.

Permitámonos la licencia de realizar los siguientes cambios de variables:

$b = x$

$c = y$

$e = p$

$g = q$

por lo tanto $i = 12 –(p + q)$

Como consecuencia las demás letras quedaran de la siguiente forma sustituyendo en las ecuaciones:

$d = 21 – x – y$

$f = 1 + x + y – p – q$

$h = 10 + p – x$

$j = 10 + q – y$

Como hemos dicho anteriormente una de esas letras va a coger el valor 10.

Vamos a ir suponer que es cada una de ellas y llegaremos a un absurdo, así demostraremos que ninguna de ellas puede coger el valor 10 supuesto. Así llegaríamos a la demostración que los números consecutivos del 1 al 10 no se pueden poner en un pentágono de forma que sumen 22, como de forma similar sucedía en la figura b) y c).

Si $x = 10 \rightarrow h = 10 + p - x = p \rightarrow h = p$ esto es absurdo, no se pueden repetir los números.

Si $y = 10 \rightarrow j = 10 + q - y = q \rightarrow j = q$, absurdo

Si $10 + p - x = 10 \rightarrow x = p$, absurdo

Si $10 + q - y = 10 \rightarrow y = q$, absurdo

Si $21 - x - y = 10 \rightarrow x + y = 11 \rightarrow f = 1 + x + y - p - q = 1 + 11 - p - q = 12 - p - q \rightarrow f = 12 - (p + q) = i \rightarrow f = i$, absurdo

Si $1 + x + y - p - q = 10 \rightarrow$ $x + y = 9 + p + q$ como $d = 21 - x - y \rightarrow d = 21 - 9 - p - q = 12 - (p + q) = i \rightarrow d= i$, absurdo

Por lo tanto ninguno de los números "vacantes" puede ser igual a 10, entonces llegamos a la conclusión que los números del 1 al 10 no pueden ser encajados a la estrella de cinco puntas de tal manera que los cuatro números en cada línea siempre sumen 22.

Esto proporciona un detalle interesante sobre la naturaleza de las demostraciones matemáticas. A menudo cuando queremos saber si el resultado general es cierto lo que hacemos es una prueba general y si es falsa buscamos un contraejemplo, cosa suficiente para resolver el asunto. En el caso de la estrella de cinco puntas y los números del 1 al 10 nos enfrentamos con la situación opuesta: demostramos que no existen unos números con tales soluciones. ●

Bibliografía

School Mathematics Project (1965).

Rose, M. (1988) Yet More Magic Mathematics in School.